

ANAHTARLANMIŞ DOĞRUSAL SİSTEMLERE GİRİŞ

Çağdaş TOPÇU

Ocak 2009

Proje Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
ELEKTRİK - ELEKTRONİK FAKÜLTESİ
ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
PROJE I

Contents

1 Giriş	3
2 Matematiksel Önbilgiler	4
2.1 Supremum ve İnfimum	4
2.2 Norm	4
2.3 Hurwitz ve Schur Matris	4
2.4 Kararlılık ve Lyapunov Teoremi	5
3 Anahtarlanmış Sistemler	7
3.1 Kararlılık Problemleri	9
3.1.1 Keyfi Anahtarlama Problemi	10
3.1.2 Uygun Anahtarlama İşaretleri Kümesini Bulma Problemi	10
3.1.3 Kararlılaştırma Problemi	10
3.2 Kararlılaştırma Problemi	10
3.2.1 Periyodik ve Senkron Anahtarlama İşareti	14
3.3 Dayanıklılık	15

1 Giriş

Anahtarlanmış doğrusal sistemler birden fazla doğrusal altsistemden oluşmuş ve bu altsistemlerden hangisinin aktif hale geleceğinin bir anahtarlama işareti ile belirlendiği sistemlerdir. Uzun yıllar boyunca üzerinde durulmasına rağmen 1990'lı yıllardan itibaren çalışmaların hızlandığı bir alandır. Bunun sebebi ise anahtarlanmış doğrusal sistemlerin doğrusal sistemlerle karmaşık sistemler¹ arasında geçiş olarak kullanılmalarıdır. Çok karmaşık sistemler sanki doğrusal sistemlerin birleştirilmiş haliymişçesine tasarlanabilmektedir. Bu da kontrolcü tasarımında doğrusal sistem analizlerinden çok daha güçlü yöntemler elde edebilmemizi sağlamaktadır. Bu yöntemle oldukça zor olan lineer olmayan sistem analizini görece basit hale getirebiliriz. Bütün bunların dışında gelişen bilgisayar sistemleri ve güç elektroniği elemanları sayesinde elektrik mühendisliğinin güç sistemleri ve güç elektroniği, uçak ve hava trafik kontrolü ve haberleşme ağları gibi bir çok uygulamasında kullanılmaktadır. Anahtarlanmış doğrusal sistemler, dayanıklı analiz ve kontrolü, adaptif kontrol, akıllı kontrol problemlerine farklı yaklaşımlar getirilmesini sağlamıştır.

Bu belgede ilk olarak matematiksel kavramlar açıklanmaya çalışılmıştır. Ardından kısaca anahtarlanmış doğrusal sistemler tanıtılmış, temel kararlılık problemleri ve dayanıklılık üzerinde durulmuştur.

¹uncertain systems olarak da geçmektedir

2 Matematiksel Önbilgiler

Bu bölümde belgede kullanacağımız temel tanımlar ve matematiksel altyapı verilmeyi çalışılacaktır. Sistemlerin tanımlanması ve sistemlerin kararlılığı konularına yeni olanlar için ve belgenin bilgi bütünlüğünü koruması amaçlanmıştır.

2.1 Supremum ve İnfimum

X kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. A nın X deki alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanına A nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Eğer $\inf A \in A$ ise $\inf A$ ya A nın minimum elemanı denir ve $\min A$ ile gösterilir. A nın X deki üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanına A nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Eğer $\sup A \in A$ ise $\sup A$ ya A nın maksimum elemanı denir ve $\max A$ ile gösterilir.

Supremum ve infimum kavramlarını ilerde anahtarlama işaretinin seçilimi sırasında işaretin devreye girdiği anı elde ederken kullanacağız.

2.2 Norm

Normu kafamızda vektörlerin uzunluğu olarak canlandırabiliriz. Matematiksel olarak tanımlarsak: F bir kompleks cisim, V de F de tanımlanmış bir vektör uzayı olsun. Norm V de tanımlı bir fonksiyon olsun öyle ki $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$ ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- (i) $\|v\| \geq 0$ bütün $v \in V$ için ve $\|v\| = 0$ ancak ve ancak $v = 0$ olduğunda
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ bütün $v \in V$ ve $\lambda \in F$ için
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ bütün $v, w \in V$ için

Biz bu belgede $\|\cdot\|$ ile öklit normunu kastedeceğiz. x , n boyutlu X vektör uzayının elemanı olsun, x in öklit normu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ olur.

2.3 Hurwitz ve Schur Matris

Hurwitz matris bütün özdeğerlerinin reel kısmı negatif olan kompleks matristir yani

$$\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$$

olur. Yakınsak Hurwitz matris ise bütün özdeğerlerinin boyu 1 den küçük olan matristir. Sürekli dinamik sistemlerin jakobiyesi Hurwitz ise sistem asimptotik kararlıdır.

Schur matris ise yakınsak matris anlamına gelmektedir.

2.4 Kararlılık ve Lyapunov Teoremi

En genel anlamda aşağıdaki vektörel diferansiyel denklemini ele alalım

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ve $t \geq 0$ dır. Sistemin başlangıç koşulunda sabit kaldığı noktalara dinamik sistemin denge noktaları denir. Bizim incelediğimiz zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin eğer varsa bir denge noktası olacağından bu denge noktasını orijin yani sıfır noktasını seçebiliriz. Dinamik sistemleri bu denge noktasına yakın bir başlangıç durumunda başlatırsak ve eğer sistem dengeye oturmaya çalışırsa yani durumlar orijine yaklaşmaya çalışırsa sisteme kararlı deriz. Eğer sistemin durumları denge noktasından uzaklaşırsa kararsızdır deriz.

Sistem (1) in $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu için çözümünü $\phi(t; t_0, x_0)$ olsun.

Tanım 2.1 Denge noktası için aşağıdakileri söyleyebiliriz:

- kararlıdır, her bir $\epsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ için bir $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ vardır öyle ki

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0) \implies \|\phi(t; t_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

- düzenli kararlıdır, her bir $\epsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\epsilon)$ vardır öyle ki

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon) \quad t_0 \geq 0 \implies \|\phi(t; t_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

- çekicidir, her bir $t_0 \geq 0$ için bir $\delta = \delta(t_0)$ vardır öyle ki

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0) \implies \|\phi(t; t_0, x_0)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

- düzenli çekicidir, bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$\|x_0\| < \delta, t_0 \geq 0 \implies \|\phi(t_0 + t; t_0, x_0)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

- kararlı ve çekici ise asimptotik kararlıdır
- düzenli kararlı ve düzenli çekici ise asimptotik kararlıdır
- üstel kararlıdır, $r, \alpha, \beta > 0$ gerçel sabitlerdir öyle ki

$$\|\phi(t_0 + t; t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha t} \|x_0\| \quad \forall t, t_0 \geq 0 \quad \|x_0\| < r.$$

Kararlılığı sistem durumlarının hareketiyle kafamızda canlandırmaya devam edersek, asimptotik kararlılık durumların denge durumuna yani sıfıra gelmesidir. Sıradan kararlılık veya Lyapunov kararlılığı ise sıfır noktasına ulaşmasa bile durumların belirli bir alanın içinde sınırlanmasıdır. Üstel kararlılıkta durumlar sıfır noktasına üstel hızla yaklaşır.

Teorem 2.1(1) sisteminin $x^* = 0$ denge noktasını içeren bir $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi olsun. $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^\infty$ şeklinde bir fonksiyon

$$V(0) = 0 \text{ ve } V(x) > 0, x \in \mathcal{O} - \{0\} \quad (2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, x \in \mathcal{O} \quad (3)$$

koşullarını sağlıyorsa $x^* = 0$ denge noktasında sistem kararlıdır.

Eğer

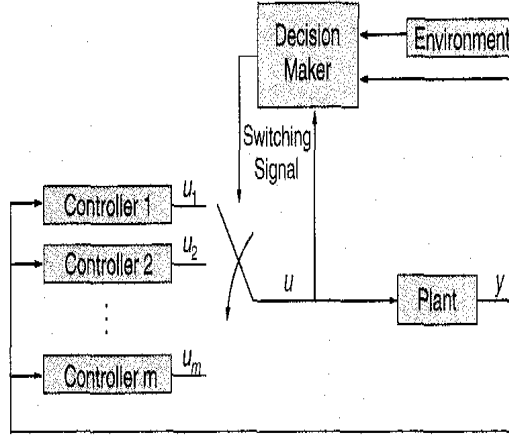
$$\dot{V}(x) \leq 0, x \in \mathcal{O} - \{0\} \quad (4)$$

koşulunu da sağlıyorsa $x^* = 0$ denge noktasında sistem asimptotik kararlıdır. \square

Buradaki $V(x)$ fonksiyonu Lyapunov fonksiyonu olarak bilinir. Bu teoremin düzenli ve üstel kararlı sistemler için genişletilmiş halleri bulunmaktadır. Ancak burada vermiyoruz.

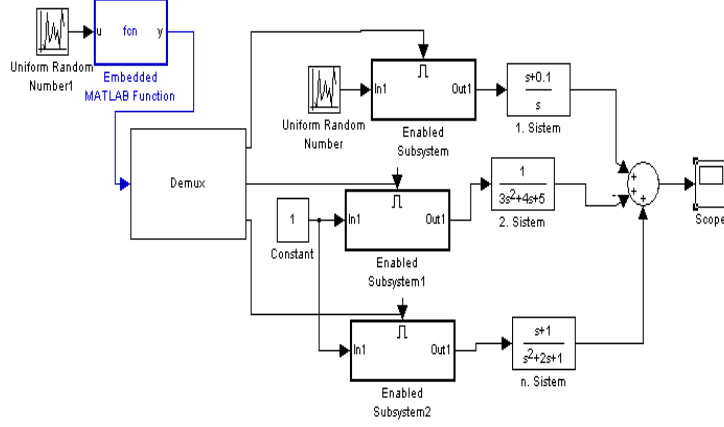
3 Anahtarlanmış Sistemler

Anahtarlanmış sistemler hibrit sistemlerin özel bir halidir. Hibrit sistemler sürekli ve ayrık dinamiklerin birleşimi olan sistemlerdir. Sürekli dinamiklerden kastımız diferansiyel denklemlerle modellenebilen sürekli zamanlı dinamik sistemler olabileceği gibi zamanın parçalara ayrılıp fark denklemleriyle yazılabilen ayrık zamanlı dinamik sistemler de olabilir. Ayrık dinamikler ise bir biri ile bağımsız durumların ardarda geliştiği olaylar dizisi olarak düşünülebilir. Bu yüzden hibrit sistem kavramı çok geniş bir kavramdır. Anahtarlanmış sistemlerde anahtarlama sürekli dinamiklerin bir anahtarlama kuralıyla yani ayrık bir dinamikle kontrol edilmesi, seçilmesi anlamına gelir. Hibrit sistemlerden farklı olarak anahtarlanmış sistemlerde önemli olan bütün anahtarlama işaretlerinin taradığı kontrol edilebilir uzayın kararlılığının belirlenmesidir ve sürekli dinamiklerin kararlılığı ön plandadır. Şekil 3.1 de genel bir anahtarlanmış kontrol sistemi şeması verilmiştir.



Şekil 3.1 Anahtarlanmış sistem şeması

Örnek 3.1. Aşağıda anahtarlama işaretinin rastgele yapıldığı ve seçici ile doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerden oluşmuş bir anahtarlanmış zamanla değişmeyen doğrusal sistem örneği verilmiştir.



Şekil 3.2 Keyfi anahtarlanmış bir sistemin Simulink modeli

Örnek 3.2. Diğer bir basit örnek de iki doğrusal zamanla değişmeyen sistemle oluşturulan örnektir. Zamanla değişmeyen doğrusal sistemleri diferansiyel denklem sistemleriyle tanımlayabiliriz.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

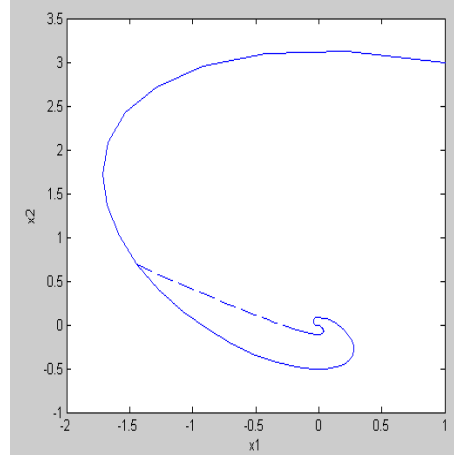
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (6)$$

Bizim örneğimizdeki sistemleri tanımlayalım.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \quad 1], \quad D_1 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \quad 1], \quad D_2 = 0$$

Sistemin $x_0 = [1 \quad 3]^T$ başlangıç durumu ve belirli bir t anında 1. sistemden 2. sisteme geçişi karşısında durum yörüngesi Şekil 3.3 deki gibi olur. Burada kesikli çizgiyle gösterilen t anında 2. sistemin devreye girmesiyle oluşan yörüngedir.



Şekil 3.3 İki sistemin anahtarlanmasıyla elde edilen durum yörüngesi

Burada iki kararlı doğrusal sistem anahtarlanmıştır ve sonuç yine kararlıdır. Kararsız iki sistemden kararlılaştırıcı bir anahtarlama kuralıyla kararlı bir anahtarlanmış sistem elde edilebileceği gibi kararlı iki sistemden kararsız bir sistem oluşturulabilir.

Herhangi bir anahtarlanmış sistem şu şekilde gösterilebilir:

$$\delta(x) = f_\sigma \quad (7)$$

burada $f_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $f_p : p \in \mathbf{P}$ olan bir fonksiyon ailesidir. \mathbf{P} herhangi bir indeks kümesi ve $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{P}$ işaretleme sinyalidir. \mathbf{P} kümesi sonlu boyutlu doğrusal vektör uzayının yoğun alt kümesidir.

Anahtarlanmış doğrusal otonom (giriş işaretinden ve gürültülerden arındırılmış) sistemi şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\delta x(t) = A_\sigma x(t) \quad (8)$$

burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum, $\sigma \in M := \{1, \dots, m\}$ tasarlanan sabit işaretleme sinyali, $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in M$ gerçel sabit matrisler ve δ sürekli zamanda türev, ayırık zamanda ise ileri kaydırma operatörüdür.

3.1 Kararlılık Problemleri

Sistemlerin kararlılığı onların kullanılabilirliği açısından oldukça önemlidir. Endüstrideki uygulamalarda ve haberleşme şebekelerindeki veri güvenliğinin sağlanması açısından üzerinde oldukça durulan bir konudur. Burada Liberzon ve Mors'un 1999 yılındaki yayınladıkları bazı temel kararlılık problemlerine değinelim.

3.1.1 Keyfi Anahtarlama Problemi

Sistem (7) nin herhangi bir anahtarlama sinyali için asimptotik kararlılığını garantiyecek şartın araştırılması problemidir. Bilgisayar kontrollü sistemlerinin gelişmesi ve çok hızlı anahtarlamanın yapılabilmesiyle keyfi anahtarlanan sistemler için kararlılık testlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bütün anahtarlama sinyallerini gözönünde bulunduracağımız için bu problemin hemen görülebilir basit bir çözümü yoktur. Sistemimizdeki alt sistemlerin denge noktaları ortak ve orijin olsun, $f_p(0) = 0$, $p \in \mathbf{P}$. Keyfi anahtarlanmış sistemin kararlı olabilmesi için anahtarlanan alt sistemlerin herbirinin kararlı olması gerektiği aşikardır. Eğer kararsız bir sistem varsa anahtarlama işaretinin kararsız sistemi seçmesi ile sistem kararsızlaşabilir. Ancak bu da yeterli koşul değildir çünkü alt sistemleri kararlı olan iki sistem anahtarlama işaretiyle kararsız hale gelebilmektedir.

3.1.2 Uygun Anahtarlama İşaretleri Kümesini Bulma Problemi

Bu problemde keyfi anahtarlama olarak farklı olarak sistemi asimptotik kararlı hale getirebilecek anahtarlama kümelerinin bulunması amaçlanmaktadır. Önceki problemde olduğu gibi bu problemde de alt sistemlerin kararlı olduğu kabul edilir.

3.1.3 Kararlılaştırma Problemi

Bu problem ise yavaş anahtarlama yapılırken sistemi kararlı hale getiren tek elemanlı anahtarlama işareti kümesinin bulunmasının araştırılmasıdır. Biz bu problemi anahtarlanmış doğrusal otonom sistem (8) için inceleyeceğiz.

3.2 Kararlılaştırma Problemi

Tanım 3.1. Sistem (8) i iyi oturmuş ve düzenli (asimptotik, üstel) kararlı kılan bir σ anahtarlama işareti varsa sistem kararlılaştırılabilir deriz.

Anahtarlama sinyalini başlangıç değerlerine bağlı olarak $\sigma(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ şeklinde gösterebiliriz. Eğer anahtarlama işareti başlangıç durumundan bağımsızsa yani $\sigma(t) = \varphi(t; t_0, x_1) = \varphi(t; t_0, x_2) \quad \forall t \geq t_0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ise anahtarlama işaretimiz başlangıç durumuna göre tutarlıdır.

Tanım 3.2. Eğer sistem (8) i iyi oturmuş ve düzenli kararlı hale getirebilen bir tutarlı işaretleme sinyalimiz varsa sistemimiz tutarlı kararlılaştırılabilir.

Tanım 3.3. Sistem (8) bütün başlangıç koşullarında ($x_0 \in \mathbb{R}^n$) sistem çözümünü sifra yakınsayan bir başlangıç anahtarlama işaretimiz, σ_{x_0} , varsa anahtarlanmış yakınsaktır.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; 0, x_0, \sigma_{x_0}) = 0.$$

Teorem 3.1. Anahtarlanmış doğrusal sistem $\sum(A_i)_M$ tutarlı kararlıysa, $k \in M$ olsun, öyle ki

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 0$$

burada $\lambda_i(A)$, $1 \leq i \leq n$ A matrisinin özdeğerleridir. Dahası sistem tutarlı asimptotik kararlı ise eşitsizlik doğrudur.

İspat. σ tutarlı anahtarlama işareti anahtarlama sistemini kararlılaştırır. Anahtarlama işaretinin süreç dizisi

$$DS_\sigma = \{(i_0, h_0), (i_1, h_1), \dots\}$$

olsun. Eğer dizi sonlu ise son aktiflenen sistem kararlı olmalıdır böylece teorem sağlanır. Eğer dizi sonlu değilse $\sum_{i=1}^l h_i \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$ olur. Tanım 3.2 e göre $\varepsilon = 1$ seçelim ve bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\|x_0\| \leq \delta \implies \|\phi(t; 0, x_0, \sigma)\| \leq 1 \quad \forall t \geq t_0.$$

Yani,

$$\|e^{A_{i_s} h_s}, \dots, e^{A_{i_1} h_1}, e^{A_{i_0} h_0} x_0\| \leq 1 \quad \forall x_0 \in \mathbf{B}_\delta \quad s = 0, 1, \dots$$

Sonuçta dizinin bütün elemanları

$$e^{A_{i_0} h_0}, e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_0} h_0}, \dots, e^{A_{i_s} h_s} \dots, e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_0} h_0}, \dots \quad (9)$$

$\frac{1}{\delta}$ ile sınırlanmak zorundadır. Varsayalım ki

$$\varrho = \min_{k \in M} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_k) \right\} > 0.$$

Ardından, aşağıdaki durumu elde ederiz

$$\det e^{A_k h} = \exp \left(h \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_k) \right) > e^{\varrho h} \quad k \in M \quad h > 0.$$

Sonuç olarak,

$$\det e^{A_{i_s} h_s} \dots e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_0} h_0} \geq e^{\varrho \sum_{j=0}^s h_j} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty.$$

Bu da matrisin elemanlarının sınırlandırılmış olmasıyla çelişmektedir. Teoremin öbür parçasının ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.2. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) anahtarlama sistemi asimptotik kararlılaştırılabilir;
- (ii) anahtarlama sistemi üstel kararlılaştırılabilir;
- (iii) anahtarlama sistemi anahtarlama yakınsaktır.

İspat. (ii) \implies (i) \implies (iii) olduğu aşıkardır. (iii) \implies (ii) olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Anahtarlanmış yakınsaklığı ele alalım. Her x durumu birim yuvar yüzeyinde (\mathbf{S}_1) yer almaktadır. Bir t_x zamanı ve anahtarlama yolu $\sigma_x = [0, t_x] \mapsto M$ vardır, öyle ki sistemin çözümü $1/4$ yarıçaplı yuvarın içinde yer alır

$$\phi(t_x; 0, x, \sigma_x) \in \mathbf{B}_{\frac{1}{4}}. \quad (10)$$

σ_x in zaman dizisi t_1, \dots, t_k aşağıdaki gibi olsun

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} := t_x.$$

$x(t) = \Phi x(0)$ eşitliğindeki taşıma matrisi

$$\Phi(t, 0, \sigma_x) = e^{i_j(t-t_j)} e^{i_{j-1}(t_j-t_{j-1})} \dots e^{i_0(t_1-t_0)}$$

$$t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, 1, \dots, k$$

taşıma matrisini (9) denklemine koyarsak

$$\Phi(t_x; 0, x, \sigma_x)x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{4}}.$$

Sonuç olarak, x in bir N_x komşuluğu olsun, öyle ki

$$\Phi(t_x; 0, x, \sigma_x)y \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} \quad \forall y \in N_x.$$

x birim yuvar yüzeyi boyunca değişsin, aşıkardır ki

$$\cup_{x \in \mathbf{S}_1} N_x \supseteq \mathbf{S}_1.$$

Birim yuvar yüzeyi \mathbb{R}^n de yoğun kümedir (sınırlı ve kapalı), Finite Covering Teoremine göre belirli bir sayı l , ve birim yuvar yüzeyi üzerindeki durumların kümesi x_1, \dots, x_n vardır, öyle ki

$$\cup_{i=1}^l N_{x_i} \supseteq \mathbf{S}_1.$$

Böylece birim yuvar yüzeyi l ayrı parçaya, R_1, \dots, R_l olarak ayırabiliriz, öyle ki

(a) $\cup_{i=1}^l R_i = \mathbf{S}_1$, $R_i \cap R_j = \emptyset$ for $i \neq j$; ve

(b) her bir i için $1 \leq i \leq l$, böylece aşağıdaki durumu elde ederiz.

$$\Phi(t_x; 0, x, \sigma_x)y \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} \quad \forall y \in R_i.$$

Durum (b) ye göre her bir $i = 1, \dots, l$ ve $x \in R_i$ için t_x ve σ_x i yeniden tanımlayalım

$$t_x = t_{x_i} \text{ ve } \sigma_x = \sigma_{x_i}.$$

$T = \max_{i=1}^l t_x$, ve $\eta = \max_{i \in M} \|A_i\|$. Aşıkardır ki

$$\|\Phi(t, 0, \sigma_x)\| \leq e^{\eta T} \quad \forall x \in \mathcal{S}_1 \quad t \leq t_x.$$

Ardından $x_0 \neq 0$ dışında bir durum için bir $\theta_{x_0} : [0, \infty) \mapsto M$ anahtarlama yolu düzenleyelim. Durum dizisini özyinemeli olarak tanımlayalım

$$z_0 = x_0$$

$$z_{k+1} = \phi\left(t \frac{z_k}{\|z_k\|}; 0, z_k, \sigma \frac{z_k}{\|z_k\|}\right) \quad k = 0, 1, \dots$$

Bu şekilde her $\sigma \frac{z_k}{\|z_k\|}(t)$ belirli bir zaman aralığıyla eşleştirilebilir. Yani her duruma karşılık gelen işaret belirli bir zaman aralığında tanımlanmaktadır. Buna göre $x_0 = 0$ için herhangi bir $\theta_{x_0} : [0, \infty) \mapsto M$ anahtarlama yolu genel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\theta_{x_0}(t) = \sigma \frac{z_k}{\|z_k\|} \left(t - \sum_{i=0}^{k-1} t \frac{z_i}{\|z_i\|}\right) \quad t \in \left[\sum_{i=0}^{k-1} t \frac{z_i}{\|z_i\|}, \sum_{i=0}^k t \frac{z_i}{\|z_i\|}\right).$$

Sonunda her durum yörüngesinin anahtarlama yoluyla üstel yakınsak olduğunu gösterebiliriz.

$$\alpha = \ln 2/T \text{ ve } \beta = 2e^{\eta T}$$

olsun. α ve β değerlerine göre sistem üstel yakınsaksa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|z_{k+1}\| \leq \frac{\|z_k\|}{2} \quad k = 0, 1, \dots$$

Diğer taraftan, bütün $x \in \mathcal{S}_1$ ler için $t_x \leq T$ dir ve buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|\phi(t; 0, x_0, \theta_{x_0})\| \leq e^{\eta T} \|\phi\left(\sum_{i=0}^{k-1} t \frac{z_i}{\|z_i\|}; 0, x_0, \theta_{x_0}\right)\|$$

$$\forall t \in \left[\sum_{i=0}^{k-1} t \frac{z_i}{\|z_i\|}, \sum_{i=0}^k t \frac{z_i}{\|z_i\|}\right) \quad k = 0, 1, \dots$$

Yukardaki sonuçlardan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\|\phi(t; 0, x_0, \theta_{x_0})\| \leq \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad t \geq 0. \quad (11)$$

α ve β sabitleri x_0 ve θ_{x_0} dan bağımsızdır. Eşitsizlik (10) anahtarlanmış sistemin üstel kararlılaştırılabilir olduğunu gösterir. \square

Bu teorem esasen doğrusal sistemlerdeki denklik teoreminin anahtarlanmış sistemlere uygulamasıdır. Oldukça önemli olan teoremin ispatında kullanılan yöntemler ve teoremin sonuçları ilerde kullanılacaktır.

3.2.1 Periyodik ve Senkron Anahtarlama İşareti

Pozitif bir T zamanı olsun. Anahtarlama yolu $\theta_{[0,\infty)}$ aşağıdaki şartı sağlıyorsa periyodiktir.

$$\theta(t + T) = \theta(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Anahtarlama zamanları dizisi, $\{0, \mu_1, \mu_2, \dots\}$ doğal sayılarıyla aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa anahtarlama yolu σ senkrondur.

$$\{0, \mu_1\omega, \mu_2\omega, \dots\}$$

Teorem 3.3. Eğer anahtarlama sistemi tutarlı asimptotik kararlılaştırılabilirse bu sistemi asimptotik kararlı kılabilen bir periyodik ve senkron anahtarlama işareti vardır.

İspat. Eğer alt sistemlerden biri A_k asimptotik kararlıysa sabit anahtarlama işaretini $\sigma = k$ seçebiliriz. Onun dışında σ yı bir süreç dizisi olarak düşünelim

$$DS_\sigma = \{(i_0, h_0), (i_1, h_1), \dots\}$$

sistemi asimptotik kararlı kılsın. Aşikardır ki bu anahtarlama işareti sonsuz anahtarlama içermelidir. Teorem 3.1 e göre (9) dizisi sıfır matrisine yakınsar. N sonlu bir sayı olsun öyle ki

$$\| e^{A_{i_N} h_N} \dots e^{A_{i_1} h_1}, e^{A_{i_0} h_0} \| \leq 1. \quad (12)$$

bir $g : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}_+$ fonksiyonu tanımlayalım

$$g(s_0, s_1, \dots, s_N) = \| e^{A_{i_N} s_N} \dots e^{A_{i_1} s_1}, e^{A_{i_0} s_0} \|.$$

g fonksiyonunun sürekli olduğu görülmektedir.

$$g(h_0, h_1, \dots, h_N) < 1$$

ise $(h_0, h_1, \dots, h_n)^T$ un \mathbb{R}^{N+1} deki komşuluğu Λ vardır öyle ki

$$g(z) < 1 \quad \forall z \in \Lambda.$$

Λ de bir $z_0 = (r_0, r_1, \dots, r_N)^T$ seçelim, burada her $j = 0, 1, \dots, N$ için r_j rasyonel sayıdır. Böylece periyodik ve senkron anahtarlama yolu θ mın süreç dizisinin

$$DS_\theta = \{(i_0, r_1), \dots, (i_N, r_N), (i_0, r_0), \dots, (i_N, r_N), \dots\} \quad (13)$$

sistemi asimptotik kararlı kıldığı doğrulanır. \square

(12) eşitsizliği sistemlerin yakınsaklığını incelerken işimize yaramaktadır.

Sonuç 3.1. Bir anahtarlama doğrusal sistem için aşağıdaki yapılar denktir:

- (i) sistem tutarlı asimptotik kararlılaştırılabilir;

- (ii) sistem tutarlı üstel kararlılaştırılabilirdir;
- (iii) sistem periyodik ve senkron asimptotik kararlılaştırılabilirdir;
- (iv) bir l doğal sayısı, i_1, \dots, i_l indeks dizisi ve pozitif reel sayı dizisi h_1, \dots, h_l vardır, öyle ki $e^{A_{i_1} h_1} \dots e^{A_{i_l} h_l}$ matrisi *Schur* dur;
- (v) $s \in (0, 1)$ gerçel sayısı için, bir $l = l(s)$ doğal sayısı ve pozitif reel sayı dizisi h_1, \dots, h_l vardır öyle ki

$$\| e^{A_{i_1} h_1} \dots e^{A_{i_l} h_l} \| \leq s. \quad (14)$$

İspat. Teorem 3.3 ün ispatına göre (i) bize gösterir ki, bir N doğal sayısı vardır ve öyle ki

$$\| e^{A_{i_N} h_N} \dots e^{A_{i_1} h_1}, e^{A_{i_0} h_0} \| \leq \gamma < 1$$

$l = kN$ olsun, buna göre

$$i_{j+\mu N} = i_j \text{ ve } h_{j+\mu N} = h_j \quad j = 1, \dots, N \quad \mu = 1, \dots, k - 1.$$

Görülebilir ki

$$\| e^{A_{i_1} h_1} \dots e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_1} h_1} \| = (\| e^{A_{i_N} h_N} \dots e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_1} h_1} \|)^k = \gamma^k.$$

Herhangi bir $s \in (0, 1)$ için $k \geq \frac{\ln s}{\ln \gamma}$ olduğundan (14) eşitsizliği korunur. Yani (i) \implies (v) olur. Aynı mantıkla (iv) \implies (v) ispatlanabilir. Teorem 3.2 de (iv) \implies (iii) elde edilmişti. Diğerleri de aşıkardır. \square

3.3 Dayanıklılık

Sistemlerde dayanıklılık sistemin dış etkilere direnç gösterebilmesidir. Sistem (8) küçük gürültülerle şu şekilde gösterilebilir:

$$\dot{x}(t) = (A_\sigma + \epsilon_\sigma B_\sigma) \quad (15)$$

burada $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in M$ sabit olarak verilmiştir ve ϵ_k ($k \in M$) reel sayılardır.

Teorem 3.4. Sistem (8) asimptotik kararlılaştırılabilir olsun. $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ reel sayıları olsun öyle ki gürültülü sistem (15) aşağıdaki şartı sağlıyorsa kararlılaştırılabilirdir:

$$|\epsilon_k| \leq \kappa_k \quad k \in M.$$

İspat. Teorem 3.2 nin ispatında birim yuvar yüzeyini sonlu sayıda R_1, \dots, R_l kümelerine bölebilmistik, öyle ki

- (a) $\cup_{i=1}^l R_i = S$, $R_i \cap R_j = \emptyset$ for $i \neq j$;

(b) her bir i için $1 \leq i \leq l$, bir t_x zamanı ve σ_x anahtarlama yolu elde etmiştik, öyle ki

$$\Phi(t_x; 0, x, \sigma_x)y \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} \quad \forall y \in R_i$$

(c) bütün $i = 1, \dots, l$ ler için $t_{x_i} \leq T$ olan bir T zamanımız vardır.

$[0, t_{x_i})$ aralığında σ_{x_i} için bir anahtarlama süreç dizisi olsun:

$$\{(j_{i1}, h_{i1}), \dots, (j_{ik_i}, h_{ik_i})\}$$

Ardından aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\| e^{A_{j_{ik_i}} h_{ik_i}} \dots e^{A_{j_{i1}} h_{i1}} y \| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in R_i.$$

Bir g_i fonksiyonunu tanımlayalım,

$$g_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \sup_{y \in R_i} \| e^{(A_{j_{ik_i}} + \varepsilon_{j_{ik_i}} B_{j_{ik_i}}) h_{ik_i}} \dots e^{(A_{j_{i1}} + \varepsilon_{j_{i1}} B_{j_{i1}}) h_{i1}} y \|.$$

g_i fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. Madem

$$g_i(0, \dots, 0) \leq \frac{1}{2}$$

$\kappa_{i1}, \dots, \kappa_{im}$ pozitif sayılardır ve öyle ki

$$g_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \leq \frac{2}{3} \quad \forall |\varepsilon_j| \leq \kappa_{ij} \quad j \in M.$$

i yi dönüştürelim,

$$\kappa_k = \min \{ \kappa_{11}, \dots, \kappa_{lm} \quad k \in M \}.$$

Gürültülü sistem (15) i aşağıdaki eşitsizlikle inceleyelim,

$$|\varepsilon_k| \leq \kappa_k \quad k \in M.$$

Φ' sistem (15) in taşıma matrisi olsun açıktır ki,

$$\Phi'(t_{x_i}, 0, \sigma_{x_i})y \in \mathbf{B}_{\frac{2}{3}} \quad \forall y \in R_i \quad i = 1, \dots, l.$$

Bu Teorem 3.2 nin ispatıyla beraber gürültülü sistemin asimptotik kararlı olduğunu gösterir. \square

Kaynaklar

Karabacak, Ö., 2006. Anahtarlanmış doğrusal sistemlerin kararlılığının incelenmesi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Bayraktar, M., 1998. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Liberzon, D. and Morse, S., 1999. Basic problems in stability analysis of switched systems, IEEE Control Systems Magazine.

Sun, Z., and Ge S.S., 2005. Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag London, USA.

Khalil, H.K., 2000. Nonlinear Systems 3. ed., Prentice Hall, New Jersey.